
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. DORE

SOMMA DI OPERATORI CHIUSI E APPLICAZIONI A
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

22 GENNAIO 1987

1. INTRODUZIONE

Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo in uno spazio di Banach X .

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

dove f è una funzione da $[0, T]$ a X con regolarità che verrà precisata in seguito.

Per il problema (1) sono state date numerose definizioni di soluzione; qualunque sia la definizione data si ha comunque (se $f \in L^1([0, T], X)$)

$$(2) \quad u(t) = \int_0^t T(t-s) f(s) ds$$

dove T è il semigruppo generato da A .

La (2) garantisce la unicità della soluzione, ma indica anche che, in generale, non ci si può attendere che la u così definita sia una "vera" soluzione. Scegliendo per esempio $f(t) = T(t)x$, f è continua, ma si ottiene $u(t) = t T(t)x$ e in generale non si ha neppure la appartenenza di $u(t)$ a $\mathcal{D}(A)$ o la derivabilità della u .

E' chiaro quindi che se si vuole avere l'esistenza di soluzioni "buone" per (1) è necessario fare ipotesi sulla f e/o sul semigruppo o anche, come vedremo in seguito, sullo spazio X .

Le soluzioni considerate nel seguito saranno le seguenti:

a) Soluzioni nel senso continuo:

$$u \in C^1([0, T], X) \cap C([0, T], \mathcal{D}(A)) \quad \text{tale che} \quad u(0) = 0 \text{ e}$$

$$\forall t \in [0, T] \quad u'(t) = Au(t) + f(t)$$

b) Soluzioni nel senso L^p ($1 \leq p < +\infty$):

$$u \in W^{1,p}([0,T],X) \cap L^p([0,T],\mathcal{D}(A)) \text{ tale che } u(0) = 0 \text{ e} \\ u'(t) = A u(t) + f(t) \quad \text{q.d. su } [0,T]$$

(qui e nel seguito $\mathcal{D}(A)$ sarà dotato della norma del grafico).

La (2) garantisce inoltre che dalla esistenza di soluzione del problema di Cauchy per ogni f in un certo spazio funzionale segue immediatamente la dipendenza continua di Au e u' da f .

Infatti la (2) definisce un operatore continuo da $L^1([0,T],X)$ a $C([0,T],X)$, mentre gli operatori di derivazione e di moltiplicazione per A sono operatori chiusi in $C([0,T],X)$. Perciò se il problema di Cauchy (1) ha soluzione nel senso continuo $\forall f$ in uno spazio di Banach \mathcal{F} immerso con continuità in $L^1([0,T],X)$ allora gli operatori $f \mapsto u'$ e $f \mapsto Au$ sono operatori chiusi da \mathcal{F} a $C([0,T],X)$ (perché composizione di un operatore continuo con uno chiuso) e sono definiti su tutto \mathcal{F} , perciò sono continui.

Analogo fatto vale per le soluzioni nel senso L^p .

2. SOLUZIONI NEL SENSO CONTINUO

I ipotesi classiche che, dato un arbitrario A generatore di un semigrupp C_0 , garantiscono la esistenza di soluzioni in senso continuo, sono la appartenenza di f a $C^1([0,T],X)$ oppure a $C([0,T],\mathcal{D}(A))$ (vedi [P]).

Tali ipotesi possono essere indebolite chiedendo che $f \in W^{1,1}([0,T],X)$ oppure $f \in L^1([0,T],\mathcal{D}(A)) \cap C([0,T],X)$ (vedi p. es. [DPS] Th. 8.1 e 8.3).

Nel caso in cui A generi un semigrupp analitico l'esistenza di soluzioni è garantita da ipotesi più deboli sulla f .

Oltre al risultato classico secondo cui esiste la soluzione se f è hölderiana, è stato provato che il problema (1) ha soluzione anche se f è continua secondo Dini, cioè se esiste $\phi \in C([0,T], [0,+\infty[)$ tale che

$$\forall t, s \in [0, T] \quad |f(t) - f(s)| \leq \phi(|t-s|) \quad \text{e} \quad \int_0^T \frac{\phi(t)}{t} dt < +\infty$$

(vedi [CP] Th. 3.2).

Oltre che da una regolarità della f rispetto alla variabile t la esistenza di soluzioni di (1) è assicurata anche dalla regolarità dei valori di f . Si ha infatti ([SI] Th. 5.1):

se $f \in C([0, T], X) \cap B([0, T], (X, \mathcal{D}(A))_{\sigma, \infty})$ allora il problema (1) ha soluzione nel senso continuo.

(Indichiamo con $(X, \mathcal{D}(A))_{\sigma, \infty}$ gli spazi di interpolazione reale tra X e $\mathcal{D}(A)$ e con $B([0, T], Y)$ lo spazio delle funzioni limitate a valori in Y).

Il problema (1) ha inoltre soluzione continua per ogni $f \in C([0, T], X)$ se A è limitato.

Esistono però anche operatori non limitati per cui il problema (1) ha soluzione per ogni f continua.

Esempio:

Sia $X = c_0$, $\mathcal{D}(A) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0 : (n x_n) \in c_0\}$. $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow c_0$ tale che $(Ax)_n = -n x_n$. A genera il semigruppato $T(t)$ con $(T(t)x)_n = e^{-nt} x_n$.

Il problema (1) ha in questo caso la soluzione u tale che

$$u_n(t) = e^{-tn} \int_0^t e^{sn} f_n(s) ds$$

e questa è in $C^1([0, T], X) \cap C([0, T], \mathcal{D}(A))$.

Gli operatori per cui il problema (1) ha soluzione nel senso continuo qualunque sia il dato continuo sono stati caratterizzati tramite il semigruppato che essi generano da Travis (vedi [T]). Egli prova che (1) ha soluzione per ogni f continua se e solo se il semigruppato $T(t)$ generato da A è a "semivariazione limitata", cioè al variare di $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tra le decomposizioni di $[0, T]$ si mantiene limitato

$$\sup\left\{\left\|\sum_{j=0}^n [T(t_j)-T(t_{j-1})]x_j\right\| : x_j \in X, \|x_j\| \leq 1\right\}$$

In particolare se il semigruppò è a variazione limitata esso è anche a semivariazione limitata.

Si può inoltre provare ([T] Lemma 3.2) che il fatto che T sia a semivariazione limitata dipende dal comportamento di T in un intorno di 0.

Non sono state finora trovate caratterizzazioni migliori dei semigruppò a semivariazione limitata, è stato però provato che se X non contiene lo spazio c_0 , quindi per esempio se X è riflessivo, non esistono operatori A illimitati tali che il problema (1) ha soluzione nel senso continuo per ogni f continua (vedi [B]).

Inoltre se esiste soluzione continua per ogni f continua, scegliendo $f = T(\cdot)x$, $x \in X$, tenuto conto che si ha dipendenza continua dal dato, risulta:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|tA T(t)x\| =$$

$$= \sup_{t \in [0, T]} \|A \int_0^t T(t-s) T(s)x \, ds\| \leq$$

$$\leq C \sup_{t \in [0, T]} \|T(t)x\| \leq C_2 \|x\|$$

e quindi $\|tAT(t)\|$ è limitata se $t \rightarrow 0$ perciò il semigruppò T è analitico.

3. SOLUZIONI NEL SENSO L^p

Per avere l'esistenza di soluzioni nel senso L^p le ipotesi su f possono ovviamente essere indebolite.

Per esempio se A genera un semigruppò analitico e se $f \in W^{\sigma, p}([0, T], X)$ oppure $f \in L^p([0, T], (X, \mathcal{D}(A))_{\sigma, p})$ ($0 < \sigma < 1$) allora esiste la soluzione

nel senso L^p . (Vedi [G] Th. 6.1 e 6.5).

Per quel che riguarda la esistenza di soluzioni L^p qualsiasi sia $f \in L^p$ de Simon in [DS] ha dimostrato che se A genera un semigruppato analitico e se X è uno spazio di Hilbert e $1 < p < +\infty$ allora data comunque $f \in L^p([0, T], X)$ esiste una soluzione nel senso L^p di (1).

La dimostrazione procede come segue: anzitutto il teorema è provato per $p = 2$ servendosi della trasformata di Fourier; inoltre servendosi di un teorema di moltiplicatori di Schwartz ([SC]) si prova che l'operatore $f \mapsto Au$ è limitato da L^1 a L^1_{deb} , il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz garantisce allora il risultato per $1 < p < 2$ e con argomenti di dualità si passa al caso $2 < p < +\infty$.

In connessione con questo risultato vedi anche [SO], [DG], [VW]. Passando agli spazi di Banach le cattive proprietà della trasformata di Fourier non consentono di generalizzare la dimostrazione di de Simon.

Recentemente Cannarsa e Vespi (vedi [CV] e [VES]) hanno provato che se A genera un semigruppato analitico in uno spazio di Banach e se esiste $p \in]1, +\infty[$ per cui si ha esistenza di soluzione L^p per ogni $f \in L^p$ allora la stessa cosa è vera qualsiasi sia $p \in]1, +\infty[$. Essi provano che se u è soluzione di (1) allora l'operatore $f \mapsto Au$ è continuo da L^1 a L^1_{deb} e da L^∞ a BMO . Opportuni teoremi di interpolazione consentono allora di ottenere la continuità in ogni L^p se essa sussiste per un $p \in]1, +\infty[$.

4. CHIUSURA DELLA SOMMA DI OPERATORI

Sia \mathcal{F} uno spazio di Banach immerso con continuità in $L^1([0, T], X)$.

Definiamo in \mathcal{F} i seguenti operatori

$$\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{F} : u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ q.d. su } [0, T], Au \in \mathcal{F}\}$$

$$(\mathcal{A}u)(t) = -A(u(t))$$

$$\mathcal{B}: \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{F}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \{u \in \mathcal{F} : u' \in \mathcal{F}, u(0) = 0\}$$

$$\mathcal{B}u = u'$$

\mathcal{A} e \mathcal{B} sono operatori chiusi in \mathcal{F} se $\mathcal{F} = L^1([0, T], X)$, quindi anche se \mathcal{F} è immerso con continuità in L^1 .

Il problema (1) si scrive allora

$$(3) \quad \mathcal{A}u + \mathcal{B}u = f$$

La (2) definisce un operatore lineare continuo \mathcal{S} in $L^1([0, T], X)$ e per \mathcal{F} opportuno (p. es. C o L^p) anche in \mathcal{F} , tale operatore è un inverso sinistro di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Questo ci garantisce che $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è chiudibile. Infatti se $u_n \rightarrow 0$, $u_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{B})$ e $(\mathcal{A} + \mathcal{B})u_n \rightarrow f$ allora $u_n = \mathcal{S}(\mathcal{A} + \mathcal{B})u_n \rightarrow \mathcal{S}f$ e quindi $\mathcal{S}f = 0$, perciò se $\tau \in [0, T]$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\tau \int_0^t T(s)f(t-s) \, ds \, dt = \int_0^\tau T(s) \int_s^\tau f(t-s) \, dt \, ds = \\ &= \int_0^\tau T(\tau-s) \int_{\tau-s}^\tau f(t-\tau+s) \, dt \, ds = \int_0^\tau T(\tau-s) \int_0^s f(t) \, dt \, ds \end{aligned}$$

Ma $s \rightarrow \int_0^s f(t)dt$ è in $W^{1,1}$ e quindi $\mathcal{S}(\int_0^\cdot f(t)dt)$ è soluzione in senso continuo di (1), ma, visto che tale soluzione è identicamente nulla sarà

$$\int_0^\cdot f(t)dt = 0 \text{ e quindi } f = 0 \text{ q.d.}; \text{ perciò } \mathcal{A} + \mathcal{B} \text{ è chiudibile. La dimostra-}$$

zione appena fatta prova inoltre che \mathcal{S} è iniettiva, dunque $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{S}^{-1}$.

Se $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{S}^{-1}$ allora $\forall f \in \mathcal{F}$ $\mathcal{S}f$ è soluzione di (3), cioè è soluzione di (1)

nel senso di \mathcal{F} . Condizione necessaria per la uguaglianza $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{S}^{-1}$ è il

fatto che $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ sia chiuso. Tale condizione è anche sufficiente se si sa che

$\mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ è denso in \mathcal{F} , cioè che la (3) ha soluzione per f in un sottospazio denso di \mathcal{F} ; come visto in precedenza questo è verificato se p. es.

$\mathcal{F} = L^p([0, T], X)$ $1 \leq p < \infty$. Ha quindi un certo interesse lo studio di condizioni che assicurino che l'operatore $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è chiuso.

E' evidente che non si potranno fare ipotesi del tipo $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{B})$ perché in tal caso il risultato ottenuto non sarebbe applicabile a (1).

In questo ordine di idee si ha il seguente teorema dovuto a Da Prato e Grisvard ([DPG] Th. 3.14).

Teorema 1. Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert complesso, siano \mathcal{A}, \mathcal{B} due operatori chiusi in \mathcal{H} , invertibili, con risolventi che commutano e tali che esistano $\sigma_{\mathcal{A}}, \sigma_{\mathcal{B}} \geq 0$, con $\sigma_{\mathcal{A}} + \sigma_{\mathcal{B}} > \pi$ per cui:

$$\Sigma_{\mathcal{A}} = \{z \in \mathbb{C} : \pi - \sigma_{\mathcal{A}} < \arg z < \pi + \sigma_{\mathcal{A}}\} \subseteq \rho(\mathcal{A})$$

$$\Sigma_{\mathcal{B}} = \{z \in \mathbb{C} : \pi - \sigma_{\mathcal{B}} < \arg z < \pi + \sigma_{\mathcal{B}}\} \subseteq \rho(\mathcal{B})$$

$$\text{e inoltre } \sup_{z \in \Sigma_{\mathcal{A}}} (1 + |z|) \|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| < +\infty \quad \sup_{z \in \Sigma_{\mathcal{B}}} (1 + |z|) \|(\mathcal{B} - z)^{-1}\| < +\infty$$

Supponiamo infine che esista $\theta \in]0, 1[$ tale che

$$(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))_{\theta, 2} = (\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{B}^*))_{\theta, 2}$$

Sotto tali ipotesi $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è chiuso e invertibile.

La dimostrazione si basa sul fatto che l'operatore

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mathcal{A} + z)^{-1} (\mathcal{B} - z)^{-1} dz$$

(con γ curva opportuna in $\rho(\mathcal{B}) \cap \rho(\mathcal{A})$) è continuo in \mathcal{H} e è l'inverso di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Inoltre si prova che, posto $\mathcal{Y} = (\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))_{\theta, 2} = (\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{B}^*))_{\theta, 2}$, $f \in \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{S}f \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ e $\mathcal{B}\mathcal{S}$ è continua da \mathcal{Y} in $\mathcal{S}\mathcal{E}$, analogamente $\mathcal{B}^*\mathcal{S}^*$ è continua

da \mathcal{H} in sé, perciò $\mathcal{B}\mathcal{S}$ si prolunga a un operatore continuo da \mathcal{Y}^* in sé (\mathcal{H} si identifica con un sottospazio di \mathcal{Y}^*). Si sa che in questo caso \mathcal{H} è di interpolazione tra \mathcal{Y} e \mathcal{Y}^* e quindi $\mathcal{B}\mathcal{S}$ è prolungabile a un operatore continuo in \mathcal{H} , dunque $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Anche $\mathcal{A}\mathcal{S} = 1 - \mathcal{B}\mathcal{S}$ è prolungabile a un operatore continuo in \mathcal{H} e perciò $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Ma allora

$$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A} + \mathcal{B})} = \mathcal{S}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

e quindi $\overline{\mathcal{A} + \mathcal{B}} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Il teorema 1 consente di ottenere l'esistenza di soluzioni in senso L^2 del problema (1) per ogni f in L^2 se \mathcal{A} è generatore infinitesimale di un semigruppato analitico di tipo esponenziale negativo in uno spazio di Hilbert. (L'operatore che soddisfa la condizione sugli spazi di interpolazione è la derivata).

Nel teorema 1 l'ipotesi

$$(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))_{\theta, 2} = (\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{B}^*))_{\theta, 2}$$

può essere sostituita dalla seguente: $\forall s \in \mathbb{R} \quad \mathcal{B}^{is} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ e $s \rightarrow \mathcal{B}^{is}$ è un semigruppato fortemente continuo.

Questa ipotesi è più debole della precedente: vedi [Y].

La dimostrazione procede in questo modo. Come prima $\mathcal{B}\mathcal{S}$ è limitato da $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{B}))_{\theta, 2}$ in sé $\forall \theta \in]0, 1[$, ma in ambito hilbertiano tale spazio coincide con lo spazio di interpolazione complessa $[\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{B})]_{\theta}$ e questo, per le ipotesi su \mathcal{B}^{is} , coincide con $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{\theta})$. Ma allora $\mathcal{B}\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathcal{B}^{\theta}))$ e $\mathcal{B}\mathcal{S} = \mathcal{B}^{\theta}\mathcal{S}\mathcal{B}^{-\theta} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Come prima questo implica che $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è chiuso e $\mathcal{S} = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}$.

Anche questa versione del teorema può essere utilizzata per lo studio del problema (1) ottenendo le stesse conclusioni.

Rafforzando le ipotesi si può estendere il teorema agli spazi di Banach ζ -convessi (o UMD, vedi [VEN]).

Teorema 2. ([DV] Th. 2.1). Sia \mathcal{F} uno spazio di Banach complesso ζ -convesso.

Siano $\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{B}: \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{F}$ operatori lineari chiusi in \mathcal{F} con dominio denso.

Supponiamo che:

a) $\mathbf{R}^- \cup \{0\} \subseteq \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{B})$ e esiste $M \in \mathbf{R}^+$ tale che

$$\forall t \in \mathbf{R}^- \cup \{0\} \quad \|(\mathcal{A}-t)^{-1}\| \leq \frac{M}{1+t}$$

$$\|(\mathcal{B}-t)^{-1}\| \leq \frac{M}{1+t}$$

b) $\forall \lambda \in \rho(\mathcal{A}) \quad \forall \mu \in \rho(\mathcal{B}) \quad [(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}, (\mathcal{B}-\mu)^{-1}] = 0$

c) $\forall s \in \mathbf{R} \quad \mathcal{A}^{is} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, $\mathcal{B}^{is} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ e i gruppi $s \rightarrow \mathcal{A}^{is}$, $s \rightarrow \mathcal{B}^{is}$ sono fortemente continui.

Inoltre valgono le stime

$$\|\mathcal{A}^{is}\| \leq K e^{\theta_{\mathcal{A}}|s|} \quad \|\mathcal{B}^{is}\| \leq K e^{\theta_{\mathcal{B}}|s|} \quad \text{con } \theta_{\mathcal{A}} + \theta_{\mathcal{B}} < \pi$$

Allora $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è chiuso e invertibile.

Per dimostrare questo teorema consideriamo l'operatore

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^{z-1}}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz$$

con $c \in]0, 1[$.

La funzione integranda è olomorfa in $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ per $0 < \operatorname{Re} z < 1$, inoltre $\|\mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^{z-1}\| \leq \operatorname{cost} e^{(\theta_{\mathcal{A}} + \theta_{\mathcal{B}})|\operatorname{Im} z|}$

e quindi l'integrale converge e non dipende da c .

\mathcal{S} è un inverso sinistro di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Infatti se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ allora

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathcal{A} + \mathcal{B})x &= \\
&= \frac{1}{2i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\mathcal{A}^{1-z} \mathcal{B}^{z-1} x + \mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^z x}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz = \\
&= \frac{1}{2i} \left(\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} - \int_{C-1-i\infty}^{C-1+i\infty} \right) \frac{\mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^z x}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz = \\
&= \pi \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{\mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^z}{\operatorname{sen}(\pi z)} x \right) = x
\end{aligned}$$

Viceversa se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha)$ per qualche $\alpha \in]0, 1[$ allora $\mathcal{S}x \in \mathcal{D}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ e $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{S}x = x$
 Infatti in tal caso

$$\frac{\mathcal{A} \mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^{z-1} x}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{\mathcal{A}^{1-z-\alpha} \mathcal{B}^{z-1} \mathcal{A}^\alpha x}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

è integrabile sulla retta $\operatorname{Re} z = 1-\alpha$, perciò $\mathcal{S}x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e

$$\mathcal{A}\mathcal{S}x = \frac{1}{2i} \int_{1-\alpha-i\infty}^{1-\alpha+i\infty} \frac{\mathcal{A}^{1-z} \mathcal{B}^{z-1} x}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz$$

D'altra parte in questo caso

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}x &= \frac{1}{2i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \frac{\mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^{z-1} x}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz + \pi \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{\mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^{z-1}}{\operatorname{sen} \pi z} x \right) = \\
&= -\frac{1}{2i} \int_{1-\alpha-i\infty}^{1-\alpha+i\infty} \frac{\mathcal{A}^{1-z} \mathcal{B}^{z-2} x}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz + \mathcal{B}^{-1} x = -\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}\mathcal{S}x + \mathcal{B}^{-1} x
\end{aligned}$$

Perciò $\mathcal{S}x \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ e $\mathcal{B}\mathcal{S}x = -\mathcal{A}\mathcal{S}x + x$.

Da tutto questo segue che $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è chiudibile e $\mathcal{S} = (\overline{\mathcal{A} + \mathcal{B}})^{-1}$.

Infatti se $x_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, $x_n \rightarrow 0$ e $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x_n \rightarrow y$ allora

$x_n = \mathcal{S}(\mathcal{A} + \mathcal{B})x_n \rightarrow \mathcal{S}y$ e quindi $\mathcal{S}y = 0$.

Visto che se $0 < \alpha < 1$ $\mathcal{A}^{-1}y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha)$ si ha $\mathcal{S}\mathcal{A}^{-1}y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ e $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{S}\mathcal{A}^{-1}y = \mathcal{A}^{-1}y$, ma $\mathcal{S}\mathcal{A}^{-1}y = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}y = 0$ quindi anche $\mathcal{A}^{-1}y = 0$ e allora $y = 0$, perciò $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è chiudibile.

Inoltre sia $x \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}})$, sia $x_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ tale che $x_n \rightarrow x$ $(\mathcal{A}+\mathcal{B})x_n \rightarrow \overline{(\mathcal{A}+\mathcal{B})x}$.

Evidentemente $x_n = \mathcal{S}(\mathcal{A}+\mathcal{B})x_n + \mathcal{S}(\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}})x$ e quindi $\mathcal{S}(\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}})x = x$. Viceversa dato $x \in \mathcal{F}$ sia $x_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ $x_n \rightarrow x$; allora $\mathcal{S}x_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$, $\mathcal{S}x_n \rightarrow \mathcal{S}x$ e $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{S}x_n = x_n$ da cui $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{S}x_n \rightarrow x$ e quindi $\mathcal{S}x \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}})$ e $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{S}x = x$.

Per provare che $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è chiuso è sufficiente allora dimostrare che $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{B})$, perché allora $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$.

A tal fine è fondamentale l'ipotesi che \mathcal{F} sia ζ -convesso che finora non è stata utilizzata.

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Si ha

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mathcal{A}^{-z} \mathcal{B}^{z-1}}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz$$

dove Γ_ε è la curva da $-i\infty$ a $+i\infty$ composta dalle due semirette $\{is: |s| > \varepsilon\}$ e dal semicerchio $\{z: |z| = \varepsilon, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}x &= \frac{1}{2} \int_{|s| \geq \varepsilon} \frac{\mathcal{A}^{-is} \mathcal{B}^{-1+is} x}{\operatorname{sen}(\pi is)} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varepsilon e^{i\theta}}{\operatorname{sen}(\pi e^{i\theta})} \mathcal{A}^{-\varepsilon e^{i\theta}} \mathcal{B}^{\varepsilon e^{i\theta}-1} x d\theta = \phi_\varepsilon x + \psi_\varepsilon x. \end{aligned}$$

Si vede facilmente che $\psi_\varepsilon x \rightarrow \frac{1}{2} \mathcal{B}^{-1}x$ per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Inoltre $\phi_\varepsilon x \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ e

$$\mathcal{B} \phi_\varepsilon x = \frac{1}{2} \int_{|s| \geq \varepsilon} \frac{\mathcal{A}^{-is} \mathcal{B}^{is} x}{\operatorname{sen}(\pi is)} ds$$

Se $\mathcal{B}_{\epsilon} x$ converge per $\epsilon \rightarrow 0$ allora, visto che $\phi_{\epsilon} x + \mathcal{S}x = \frac{1}{2} \mathcal{B}^{-1} x$, si ha $\mathcal{S}x = \frac{1}{2} \mathcal{B}^{-1} x \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ e quindi $\mathcal{S}x \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$.

La convergenza di $\mathcal{B}_{\epsilon} x$ si prova come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\epsilon} x &= \frac{1}{2} \int_{|s| \geq 1} \frac{\mathcal{A}^{-is} \mathcal{B}^{is} x}{\sin(\pi is)} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\epsilon \leq |s| \leq 1} \frac{\mathcal{A}^{-is} \mathcal{B}^{is} x}{\pi is} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\epsilon \leq |s| \leq 1} \left(\frac{1}{\sin(\pi is)} - \frac{1}{\pi is} \right) \mathcal{A}^{-is} \mathcal{B}^{is} x ds \end{aligned}$$

Il primo addendo non dipende da ϵ , il terzo è convergente perché

$\frac{1}{\sin \pi is} - \frac{1}{\pi is}$ ha limite finito in 0. Il secondo addendo è $\frac{1}{2i} \cdot (\mathcal{H}_{\epsilon} F)(0)$ dove \mathcal{H}_{ϵ} è la trasformata di Hilbert troncata, cioè

$$(\mathcal{H}_{\epsilon} F)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{|s| \geq \epsilon} \frac{F(t-s)}{s} ds$$

$$\text{e } F(s) = \chi_{[-1,1]}(s) \mathcal{A}^{is} \mathcal{B}^{-is}$$

Tale F è in $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \quad \forall p \in]1, +\infty[$ e quindi per le proprietà degli spazi ζ -convessi $\mathcal{H}_{\epsilon} F$ converge quasi dappertutto su \mathbb{R} .

Scelto allora t piccolo per cui $(\mathcal{H}_{\epsilon} F)(t)$ converge si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon \leq |s| \leq 1} \frac{\mathcal{A}^{-is} \mathcal{B}^{is} x}{\pi is} ds &= \mathcal{A}^{-it} \mathcal{B}^{it} \frac{1}{i\pi} \left[\int_{|s| \geq \epsilon} \frac{F(t-s)}{s} ds - \right. \\ &\left. + \left(\int_{-1}^{t-1} - \int_1^{t+1} \right) \frac{\mathcal{A}^{i(t-s)} \mathcal{B}^{i(s-t)}}{s} ds \right] \end{aligned}$$

che converge per $\epsilon \rightarrow 0$.

Abbiamo quindi $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{B})$ e in modo analogo si ottiene $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Si può provare che le ipotesi fatte su \mathcal{A} e \mathcal{B} implicano che

$$\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \{\rho e^{i\theta} : \rho > 0 \quad |\theta| \leq \theta_{\mathcal{A}}\}$$

$$\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \{\rho e^{i\theta} : \rho > 0 \quad |\theta| \leq \theta_{\mathcal{B}}\}$$

e quindi la limitazione $\theta_{\mathcal{A}} + \theta_{\mathcal{B}} < \pi$ è del tutto naturale perché collegato col fatto che \mathcal{A} e $-\mathcal{B}$ abbiano spettri disgiunti (vedi [DPG] paragrafo 3).

Per applicare il teorema 2 al problema (1) è necessario conoscere il comportamento delle potenze puramente immaginarie dell'operatore di derivazione.

Si ha il seguente teorema:

Teorema 3. ([DV] Th. 3.1). Sia X uno spazio di Banach complesso ζ -convesso sia $T \in \mathbb{R}^+$, $p \in]1, +\infty[$, $\mathcal{F} = L^p([0, T], X)$. Poniamo

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \{u \in W^{1,p}([0, T], X) : u(0) = 0\}$$

$$\mathcal{B} : \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{F}, \mathcal{B}u = u'.$$

Si ha:

a) $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \subseteq \rho(\mathcal{B})$ e esiste $K \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall \lambda \leq 0 \quad \|(\lambda - \mathcal{B})^{-1}\| \leq \frac{K}{1 - \lambda}$$

b) $\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{B}^{i\xi} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}), \quad \xi \rightarrow \mathcal{B}^{i\xi}$ è un gruppo fortemente continuo e

$$\|\mathcal{B}^{i\xi}\| \leq K_1 (1 + \xi^2) e^{\pi/2 |\xi|}$$

La dimostrazione della parte b si basa su una versione del teorema dei moltiplicatori di Mihlin per funzioni a valori vettoriali valido in spazi ζ -convessi ([MC] Th. 1.1). Si prova infatti che per $f \in \mathcal{F}$, $\varepsilon \in]0,1[$, $\xi \in \mathbf{R}$, $t \in [0,T]$ è

$$(B^{-\varepsilon+i\xi}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon-i\xi)} \int_0^t (t-s)^{\varepsilon-i\xi-1} f(s) ds =$$

$$= (\psi_{\varepsilon,\xi} * F)(t) = (\hat{\psi}_{\varepsilon,\xi} \hat{F})^V(t)$$

se F è il prolungamento di f a \mathbf{R} che si annulla fuori da $[0,T]$ e

$$\psi_{\varepsilon,\xi}(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 0 \\ s^{\varepsilon-1-i\xi} & s > 0 \end{cases}$$

Tenuto conto che

$$\hat{\psi}_{\varepsilon,\xi}(\lambda) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (e^{i(\varepsilon-1-i\xi)\pi/2} \lambda_-^{i\xi-\varepsilon} - e^{-i(\varepsilon-1-i\xi)\pi/2} \lambda_+^{i\xi-\varepsilon})$$

(dove $\lambda_+ = \max\{\lambda, 0\}$, $\lambda_- = \max\{-\lambda, 0\}$) passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene, almeno se $f \in C_0^\infty([0,T[, X)$, $\mathcal{B}^{i\xi}f = (m_\xi \hat{F})^V$

con $m_\xi(\lambda) = e^{-\pi/2\xi \operatorname{sgn}\lambda} |\lambda|^{i\xi}$. m_ξ soddisfa le ipotesi del citato teorema perché

$$m_\xi \in C^2(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \mathbf{C})$$

e

$$\sup_{0 \leq q \leq 2} \sup_{\lambda} |\lambda^q m_\xi^{(q)}(\lambda)| \leq K(1+\xi^2) e^{\frac{\pi}{2} |\xi|}$$

Perciò $\forall f \in C_0^\infty([0, T[, X)$

$$\|e^{i\xi f}\|_{\mathcal{F}} \leq \text{cost } (1+\xi^2)^{\frac{\pi}{2}|\xi|} \|f\|_{\mathcal{F}}$$

Per densità si ha allora b.

Visto che se X è ζ -convesso, anche L^p è ζ -convesso per $1 < p < +\infty$ si ha quindi

Teorema 4. ([DV] Th. 3.2). Sia X ζ -convesso. Sia A un operatore chiuso con dominio denso in X . Supponiamo che sia $[0, +\infty[\subseteq \rho(A)$ e $(1+\lambda)\|(A-\lambda)^{-1}\|$ sia limitato su $[0, +\infty[$.

Supponiamo inoltre che $\xi \mapsto A^{i\xi}$ sia un gruppo fortemente continuo in $\mathcal{L}(X)$, con $\|A^{i\xi}\| \leq K e^{\theta_A |\xi|}$ con $0 \leq \theta_A < \frac{\pi}{2}$.

Allora $\forall f \in L^p([0, T], X)$, $1 < p < +\infty$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione in senso L^p .

Operatori che soddisfino le condizioni del teorema 4 sono per esempio le realizzazioni in L^q ($1 < q < +\infty$) di operatori ellittici su domini regolari con opportune condizioni al bordo (vedi [SE]).

BIBLIOGRAFIA

- [B] D. BAILLON: Caractère borné de certains générateurs de semigroupes linéaires dans les espaces de Banach. C.R. Acad. Sci. Paris, 290 (1980) 757-760.
- [CV] P. CANNARSA, V. VESPRI, On maximal L^p regularity for the abstract Cauchy problem. Boll. Un. Mat. It. (6), 5-B (1986), 165-175.
- [CP] M.G. CRANDALL, A. PAZY, On the differentiability of weak solutions of a differential equation in Banach spaces. J. Math. Mech, 18 (1968/69) 1007-1016.
- [DPG] G. DA PRATO, P. GRISVARD, Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. J. Math. Pures Appl. (9) 54 (1975), 305-387.
- [DPS] G. DA PRATO, E. SINISTRARI, Differential operators with non dense domain. Preprint.
- [DG] J. DE GRAAF, A constructive approach to one-parameter semigroups of operators in Hilbert space. Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1971), 125-153.
- [DS] L. DE SIMON, Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 34 (1964), 547-558.
- [DV] G. DORE, A. VENNI, On the closedness of the sum of two closed operators. Preprint.
- [G] P. GRISVARD, Equations différentielles abstraites. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 2 (1969), 311-395.
- [MC] T.R. McCONNELL, On Fourier multiplier transformations of Banach-valued functions. Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 739-757.

- [P] R.S. PHILLIPS, Perturbation theory for semi-groups of linear operators. Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), 199-221.
- [SC] J.T. SCHWARTZ, A remark on inequalities of Calderon-Zygmund type for vector valued functions. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 785-799.
- [SE] R. SEELEY, Norms and domains of the complex powers A_B^Z . Am. J. Math. 93, (1971), 299-309.
- [SI] E. SINISTRARI, On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions. J. Math. Anal. Appl., 107 (1985), 16-66.
- [SO] P.E. SOBOLEVSKII: Disuguaglianze di coercività per equazioni paraboliche astratte (in russo). Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 157 (1964), 52-55.
- [T] C.C. TRAVIS, Differentiability of weak solutions to an abstract inhomogeneous differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 425-430.
- [VEN] A. VENNI, Proprietà geometriche di uno spazio di Banach e convergenza della trasformata di Hilbert. Seminario in questo volume.
- [VES] V. VESPRI, Regolarità massimale in L^P per il problema di Cauchy astratto e regolarità $L^P(L^Q)$ per operatori parabolici. Atti del convegno su equazioni differenziali e calcolo delle variazioni, a cura di L. Modica, Pisa, 1985, 205-213.
- [VW] W. VON WAHL, The equation $u' + A(t)u = f$ in a Hilbert space and L^P -estimates for parabolic equations. J. London. Math. Soc., 25 (1982), 483-497.
- [Y] A. YAGI: Coincidence entre des espaces d'interpolations et des domaines de puissance fractionnaires d'opérateurs. C.R. Acad. Sci., Paris, Sez. I, 299 (1984), 173-176.